ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - SESSION 1930

MATHEMATIQUES : durée : 2 h

2e épreuve

Cette épreuve est destinée aux Elèves des classes de Mathématiques Spéciales M, M', P, P', T, TA et TB.

Lors de la correction, il sera tenu compte de la présentation, de la clarté de la rédaction, de la rigueur des raisonnements, et du choix de la solution proposée.

EXERCICE 1

On considère les séries admettant pour terme général

a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

b) $v_n = (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$

c) $w_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

Log désigne le logarithme népérien.

Etudier leur nature, en précisant en cas de convergence si cette convergence est absolue ou non. Enoncer les théorèmes utilisés.

EXERCICE 2

On se propose de déterminer toutes les fonctions f telles que

$u = f\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$ vérifie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (E)

1° on pose $t = \frac{x^2+y^2}{z^2}$

Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

en fonction de x, y, z , f(t) et ses dérivées.

2° En déduire l'équation différentielle (E_1) vérifiée par la fonction f(t) et la résoudre.

3° En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 3

Soit α un nombre réel, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. On désigne par $D(\alpha)$ le domaine

$$D(\alpha) \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ x + y \leqslant 2(1-\alpha) \end{cases}$$

Pour tout α , $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, on pose $I(\alpha) = \iint_{D(\alpha)} \frac{dx\,dy}{1-xy}$

1° Montrer, sans calculer l'intégrale, que $I(\alpha)$ est une fonction décroissante de α sur $]0\ \frac{1}{2}]$. Pourquoi exclut-on, $\alpha = 0$?

2° On fait le changement de variable

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}$$

Démontrer que

$$I(\alpha) = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{Arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

3° on pose $t = \operatorname{Arcsin} u$

Calculer $I(\alpha)$ et montrer que c'est une fonction continue sur $]0\ \frac{1}{2}]$

Calculer la limite de $I(\alpha)$, quand $\alpha \longrightarrow 0$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail